Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Es sei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen und

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p+1 \end{pmatrix}, p \in \mathbb{P} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie die Dimension des von M aufgespannten Unterraumes.

2. Aufgabe

Es sei

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $T \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ eine invertierbare Matrix, E_4 die Einheitsmatrix und $A = TDT^{-1} - E_4$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie die Determinante von A.

3. Aufgabe

Gegeben seien lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Weiter sei b_1, b_2, b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Es gibt ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so dass $f(x) = g(x)$.

b) Gilt $f(b_1) = g(b_1)$ und $f(b_2) = g(b_2)$ und ist $f(b_1), f(b_2)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, so ist $f = g$.

c) Haben sowohl $Kern(f)$ als auch $Kern(g)$ die Dimension 2, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $f(x) = g(x) = 0$.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Gegeben sei die Ebene $E = \{(x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 3\}$ und die Gerade

$$g = \left\{ (x,y,z)^\top \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right\}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ mit $g = \mathbf{v} + \mathbb{R}\mathbf{w}$.

b) Bestimmen Sie den Punkt $\mathbf{a} \in g$, der von E den Abstand $\sqrt{6}$ hat und der am nächsten zum Ursprung $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$ liegt.

c) Sei $\mathbf{a}$ wie in Teilaufgabe 4b. Bestimmen Sie eine Gerade $h \subset \mathbb{R}^3$, für die gilt:

- $\mathbf{a} \in h$,
- $h \perp g$ und
- $h \cap E = \emptyset$.

5. Aufgabe

Es sei die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ durch die folgende Gleichung

$$x^2 + y^2 + 6xy - sx + 6 = 0$$

gegeben, wobei s ein reeller Parameter ist. Bestimmen Sie die metrische Normalform für Q und erläutern Sie, für welche Werte des Parameters s es sich bei Q um eine Hyperbel handelt.