Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem euklidischen Standardskalarprodukt. Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto A \cdot x$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschreibe die orthogonale Projektion auf den Untervektorraum

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Sei $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie $U^\perp$.

b) Bestimmen Sie die Matrix A.

c) Bestimmen Sie $v \in \mathbb{R}^3$, sodass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + U^\perp$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = v$ ist.

2. Aufgabe

Es bezeichne $R_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die orthogonale Matrix, welche die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung mit Drehwinkel φ (im positiven Drehsinn) beschreibt. Sei $E_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Einheitsmatrix.

a) Zeigen Sie: Für $\varphi \in]0, 2\pi[$ ist die Matrix $E_2 - R_\varphi$ invertierbar.

b) Seien $\varphi \in]0, 2\pi[$ und $t \in \mathbb{R}^2$ und sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto R_\varphi \cdot x + t.$$

Zeigen Sie, dass f genau einen Fixpunkt $p \in \mathbb{R}^2$ hat.
Was ist die geometrische Bedeutung dieses Fixpunktes p?

c) Sei $R = R_{\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix der Drehung mit Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$. Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto R \cdot x + t,$$

wobei $t \in \mathbb{R}^2$, und sei

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto R \cdot x.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Bestimmen Sie $t \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ das Drehzentrum von $g \circ h$ ist.

3. Aufgabe

Ist A eine Matrix, dann bezeichnet $A^\top$ die transponierte Matrix von A. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix und ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, dann ist $B^\top MB$ diagonalisierbar.

b) Ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine symmetrische Matrix und ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine invertierbare Matrix, dann ist M ähnlich zu $B^\top MB$.

c) Ist $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrisch und positiv definit und ist $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar, dann ist $B^\top MB$ positiv definit.

4. Aufgabe

Sei V ein reeller Vektorraum und sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ setzen wir $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{mal}}$. Ferner definieren wir $f^0 := \mathrm{id}$, wobei $\mathrm{id} : V \to V$ die Identitätsabbildung ist.

a) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann gilt $\mathrm{Kern}(f^n) = \{0\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $v \in \mathrm{Kern}(f^{n+1})$ mit $v \notin \mathrm{Kern}(f^n)$. Zeigen Sie:
Die Vektoren $f^0(v)$, $f^1(v)$, $f^2(v), \ldots, f^n(v)$ sind linear unabhängig.

5. Aufgabe

Gegeben seien die Quadriken

$$Q = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; 2x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0\right\}$$

und

$$\tilde{Q} = \left\{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 2y^2 - 4 = 0\right\}.$$

Bestimmen Sie eine Gleitspiegelung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q) = \tilde{Q}$.