Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass -3 ein Eigenwert von A_α ist.

2. Aufgabe

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Untervektorräume

$$M = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = 0\} \text{ und } L = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid BX = 0\}.$$

Zeigen Sie:

$$M \cap L = \{0\} \quad \text{und} \quad M + L = \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

3. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen a, b und c gibt, so dass durch

$$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^\top \begin{pmatrix} a & b & b \\ c & 1 & 0 \\ c & 0 & -a \end{pmatrix} y$$

ein Skalarprodukt definiert ist.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$ sei das Dreieck mit den Ecken A, B und C und $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^2$ sei das Dreieck mit den Ecken D, E und F. Bestimmen Sie alle euklidischen Bewegungen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche Δ_1 auf Δ_2 abbilden. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich bei der euklidischen Bewegung um eine Translation, eine Drehung, eine Geradenspiegelung oder eine Gleitspiegelung handelt.

5. Aufgabe

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die beiden Quadriken

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4xy - 2y^2 = 6 \right\}$$

und

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 6xy - 5y^2 = 12 \right\}$$

gegeben.

Man zeige, dass die beiden Quadriken Q_1 und Q_2 metrisch äquivalent (kongruent) sind und bestimme eine euklidische Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, welche Q_1 auf Q_2 abbildet.