Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6} \qquad \text{und} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6.$$

a) Berechnen Sie $A \cdot v$.

b) Zeigen Sie *ohne Berechnung des charakteristischen Polynoms von A*, dass 6 ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts.

c) Bestimmen Sie *ohne weitere Rechnungen aber mit Begründung* das charakteristische Polynom χ_A von A in vollständig faktorisierter Form.

Fortsetzung nächste Seite!

2. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir bezeichnen mit B die Matrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Einträge alle gleich 1 sind, also

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir das Polynom

$$p_A(x) := \det(A + x \cdot B)$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist der Grad von p_A höchstens eins.

b) Geben Sie mit Begründung eine konkrete Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an, sodass p_A ein Polynom vom Grad eins ist.

3. Aufgabe

Seien A, B und C drei Punkte im $\mathbb{R}^2$, welche nicht auf einer Geraden liegen. Sei Δ das Dreieck im $\mathbb{R}^2$ mit den Eckpunkten A, B und C. Beweisen Sie mit Mitteln der analytischen Geometrie folgenden bekannten Satz:
Die drei Seitenhalbierenden von Δ schneiden sich in genau einem Punkt, nämlich im Schwerpunkt $S = \frac{1}{3}(A + B + C)$ von Δ.

4. Aufgabe

a) Zeigen Sie: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(A) < 0$ ist reell diagonalisierbar.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, welche sowohl 1 als auch -1 als Eigenwerte hat. Wir bezeichnen mit V_j den Eigenraum von B zum Eigenwert $j \in \{-1, 1\}$. Zeigen Sie, dass V_1 und V_{-1} bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^n$ aufeinander senkrecht stehen.

Fortsetzung nächste Seite!

5. Aufgabe

Sei

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 4xy + 4y^2 - y = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform N sowie einen Scheitelpunkt s von Q. Geben Sie zudem eine lineare Gleichung an, deren Lösungsmenge eine Symmetrieachse von Q ist.