Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Wie üblich setzen wir $A^0 = E_2$, wobei E_2 die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix}$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass (A^0, A^1) eine Basis des kleinsten Untervektorraums U des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, der alle Potenzen von A enthält.

2. Aufgabe

Es bezeichne (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Skalarprodukte $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die die folgenden Bedingungen erfüllen, wobei die Norm, die Orthogonalität und die Winkel von Φ induziert werden.

$$\|e_3\| = 1, \quad e_2 \perp e_3, \quad \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1, \quad \cos\sphericalangle(e_1, e_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{und}$$

$$\left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{30}.$$

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Gegeben seien die beiden affinen Teilräume

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \text{ und } 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei A und B um windschiefe Geraden handelt.

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen A und B.

c) Es bezeichne U die (eindeutige) Gerade durch den Ursprung, die zu A parallel ist. Berechnen Sie den Kosinus des Winkels zwischen U und B.

4. Aufgabe

Für $t \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 8+t & 0 & 8+2t \\ 1 & 2t & 2 \\ -4-t & 0 & -4-2t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Es bezeichne $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; x \mapsto \varphi_t(x) = A_t \cdot x$ die zugehörige lineare Abbildung.

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von φ_t bzgl. der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ des } \mathbb{R}^3 \text{ an.}$$

b) Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{R}$, für die φ_t diagonalisierbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

5. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Jede orthogonale Projektion ist eine orthogonale Abbildung.

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung, so gilt $m = n$.

c) Die Komposition zweier Spiegelungen an Ebenen im $\mathbb{R}^3$ ist eine Drehung.