Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Es sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen und für $s \in \mathbb{R}$ sei $f_s : V \to V$ diejenige lineare Abbildung, welche durch die folgende Zuordnung gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha - \beta & \beta + \gamma \\ \gamma + s^2 \cdot \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Basis von V an und bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ die Darstellungsmatrix A_s von f_s bezüglich der von Ihnen angegebenen Basis.

b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A_s aus Aufgabenteil a).

c) Bestimmen Sie diejenigen $s \in \mathbb{R}$, für welche die lineare Abbildung f_s diagonalisierbar ist.

2. Aufgabe

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein Vektorraum mit $\dim V = 2n$. Weiter sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$\dim(\mathrm{Bild}(F) + \mathrm{Kern}(F)) = n.$$

Beweisen Sie, dass dann $\mathrm{Bild}(F) = \mathrm{Kern}(F)$ gilt.

3. Aufgabe

Gegeben sei der $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt. Es sei

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A eine Drehung in $\mathbb{R}^3$ beschreibt und bestimmen Sie die zugehörige Drehachse sowie den Kosinus des Drehwinkels.

4. Aufgabe

a) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

betrachte man die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto Ax$.
Bestimmen Sie den Kern von f.

b) Entscheiden Sie, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & b_1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & = & b_3 \end{array}$$

für jeden Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ eine Lösung hat. Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit Begründung!

5. Aufgabe

Es sei Q die folgende Quadrik in $\mathbb{R}^2$:

$$Q = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 7u^2 - 48uv - 7v^2 + 125u + \frac{175}{4} = 0\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q sowie eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$, welche Q auf ihre euklidische Normalform abbildet.