Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gerade betrachte man die Matrix $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wobei

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j, \\ \alpha, & \text{falls} \quad i + j = n + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

So ist beispielsweise

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det A_n = (1 - \alpha^2)^{\frac{n}{2}}$ für jede gerade Zahl $n \ge 2$ gilt.

2. Aufgabe

Für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sei die Bilinearform

$$\sigma_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \sigma_A(x, y) = \langle Ax, Ay \rangle$$

gegeben, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die Bilinearform σ_A symmetrisch ist.

b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass σ_A ein Skalarprodukt, also positiv definit ist.

c) Nun seien $n = 3$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Orthonormalisieren Sie die Basis (e_1, e_2, e_3) bzgl. σ_A nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

3. Aufgabe

Gegeben sei die reelle 4×4-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter bezeichne Pol_3 den reellen Vektorraum aller reellen Polynome in der Variablen X vom Grad ≤ 3. Bekanntlich ist

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und

$$C = (X^0, X^1, X^2, X^3)$$

eine Basis von Pol_3.

a) Es sei $f : \mathrm{Pol}_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ diejenige lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix bzgl. der Basen C und B die Matrix M ist. Geben Sie $f(a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0)$ (für $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$) konkret an.

b) Es sei $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathrm{Pol}_3$ diejenige lineare Abbildung, deren Darstellungsmatrix bzgl. der Basen B und C die Matrix M ist. Geben Sie $g(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$ (für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) konkret an.

c) Es ist $D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

(Dies darf ohne Beweis verwendet werden.)

Es sei $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ derjenige Endomorphismus, dessen Darstellungsmatrix bzgl. der Basis D die Matrix M ist. Geben Sie $h(x)$ für

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ konkret an.}$$

4. Aufgabe

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
Beweisen Sie:

a) Ist A symmetrisch, so ist auch A^2 symmetrisch.

b) Ist $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnlich zu A, so ist B^2 ähnlich zu A^2.

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar, so ist auch A^2 diagonalisierbar.

5. Aufgabe

Für Punkte $R, S \in \mathbb{R}^2$ bezeichne $d(R, S)$ den euklidischen Abstand zwischen diesen Punkten.
Es seien

$$\ell = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Für $t > 0$ sei

$$Q_t = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 : d((x, y)^\top, P) = t \cdot d((x, y)^\top, \ell)\},$$

wobei $d((x, y)^\top, \ell)$ den euklidischen Abstand von $(x, y)^\top$ zur Geraden ℓ bezeichnet.

a) Weisen Sie nach, dass Q_t für alle $t > 0$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Skizzieren Sie die Quadriken Q_t für $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $t = \sqrt{2}$ in einem Koordinatensystem.