Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

## 1. Aufgabe

Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass die beiden Gleichungen

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt sind.

## 2. Aufgabe

Es sei $f_n$ die $n$-te Fibonaccizahl, d.h. $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ für alle $n \geq 1$. Weiter sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 33 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}, \quad W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Dimension der Unterräume

$$U \cap W \quad \text{und} \quad U + W.$$

## 3. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ reell diagonalisierbar mit $\det(A) > 0$. Dann hat entweder $A$ oder $-A$ nur strikt positive Eigenwerte.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ reell diagonalisierbar mit $\det(A) > 0$. Dann hat entweder $A$ oder $-A$ nur strikt positive Eigenwerte.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $A^2$ reell diagonalisierbar ist. Dann ist auch $A$ reell diagonalsierbar.

## 4. Aufgabe

Es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 1 \\ \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $F$ eine euklidische Bewegung ist.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Punkte $p$ mit folgender Eigenschaft:

$$\text{Für jedes } x \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt: } \|x - p\| = \|F(x) - p\|.$$

Hierbei sei mit $\|\cdot\|$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

## 5. Aufgabe

Es sei $A$ eine symmetrische Matrix mit den reellen Eigenwerten $\alpha$ und $\beta$. Weiter sei

$$Q_{\alpha,\beta} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^\top A x = \alpha - \beta\right\}.$$

a) Entscheiden Sie begründet, ob es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $Q_{\alpha,\beta}$ ein Kreis ist.

b) Ermitteln Sie, für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $Q_{\alpha,\beta}$ aus zwei parallelen Geraden besteht.