Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1: Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $Pol_n(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome $p(X)$ vom $Grad(p) \leq n$ mit reellen Koeffizienten. Betrachtet werde die Abbildung

$$f : Pol_3(\mathbb{R}) \to Pol_2(\mathbb{R}), \quad p \mapsto p' - (X+1) \cdot p''.$$

Dabei bezeichnet p' bzw. p'' die erste bzw. zweite Ableitung des Polynoms p.

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix M von f bezüglich der Standardbasen $1, X, X^2, X^3$ von $Pol_3(\mathbb{R})$ und $1, X, X^2$ von $Pol_2(\mathbb{R})$.

c) Berechnen Sie eine Basis von $Kern(f)$ sowie eine Basis von $Bild(f)$.

Aufgabe 2: In Abhängigkeit von einem Parameter $s \in \mathbb{R}$ seien die beiden 3×3-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 0 & 1-s & 0 \\ s & s & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -s & s & -1 \\ 0 & -1 & s \\ s^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die A bzw. B invertierbar sind.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den Rang der Matrix $A \cdot B$.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die reelle 3×3-Matrix

$$C_t := \begin{pmatrix} 0 & t & t-2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ auf reelle Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe 4: Im euklidischen $\mathbb{R}^3$ seien die beiden folgenden Geraden gegeben:

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\ell = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die gemeinsame Lotgerade von g und h ist. Bestimmen Sie die beiden Lotfußpunkte und damit den Abstand von g und h.

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt einer Kugel mit kleinstem Radius, welche g und h berührt, und begründen Sie diese Rechnung.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5: In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y werde die Ellipse E mit den Scheitelpunkten

$$(0,3) \text{ und } (4,-1) \quad \text{sowie} \quad (1,0) \text{ und } (3,2)$$

betrachtet.

a) Skizzieren Sie E im (x,y)-Koordinatensystem. Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Ellipse E, ihre Hauptachsen und die Längen ihrer Hauptachsenabschnitte.

b) Geben Sie in den Koordinaten x und y eine Gleichung für E an.