Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Gegeben ist der Kegelschnitt mit der Gleichung

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 + 12x_2 + 8 = 0.$$

Transformieren Sie diesen Kegelschnitt in metrische Normalform und geben Sie den Typ der geometrischen Figur an.

Aufgabe 2:

Im euklidischen $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt und Standardnorm seien

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\\3\end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\\-6\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\1\\2\end{pmatrix}, v_2 = u_1 \in \mathbb{R}^4$$

$$U = u_1 + \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3,\ V = v_1 + \mathbb{R}v_2,$$
$$W = \mathbb{R}u_2 + \mathbb{R}u_3 + \mathbb{R}v_2 \subseteq \mathbb{R}^4.$$

a) Berechnen Sie eine Basis von $W^\perp$.

b) Berechnen Sie den Abstand von U und V.

Aufgabe 3:

Es sei V der Vektorraum aller reellen 2×2–Matrizen $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $M = \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 3\end{pmatrix}$.

$f : V \to V$ sei die lineare Abbildung, die durch $f(A) = A \cdot M - M \cdot A$ definiert ist. Geben Sie eine Basis des Kerns von f und dessen Dimension an.

Aufgabe 4:

Gegeben sind die Gleichungen der drei Ebenen
$E_1 :\ x - \frac{1}{4}y - 2z + 1 = 0,\quad E_2 :\ 2x - \frac{5}{2}y - 5z - \lambda = 0,\quad E_3 :\ 4x + \lambda y - 6z - \mu = 0$ mit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt es keinen gemeinsamen Punkt der drei Ebenen? Für welche λ, μ schneiden sich die drei Ebenen in einer Schnittgeraden? Geben Sie diese Schnittgerade an.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind Eigenvektoren einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zu Eigenwerten $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$. Berechnen Sie eine mögliche Matrix A!