Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A_{a,b,c}) = 0$.

b) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{Rang} A_{a,b,c} = 3$.

Aufgabe 2:
Es sei V der Vektorraum der reellen 3×3 Matrizen. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^{2012}.

b) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und $A - A^2$ jeweils nur einen reellen Eigenwert haben und zeigen Sie ferner, dass die dazugehörenden Eigenvektoren übereinstimmen.

c) Es sei U der von den Matrizen A, A^2 und A^3 aufgespannte Unterraum von V. Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}^3$, welches Eigenvektor zu jedem $B \in U$ ist.

Aufgabe 3:
Es sei V der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Auf V werde eine Abbildung

$$\Phi : V \to V \quad \text{durch} \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Bestimmen Sie den Kern und das Bild von Φ.

c) Es sei U der Unterraum

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume $\Phi(U)$, $U \cap \Phi(U)$ und $U + \Phi(U)$.

Aufgabe 4:

a) Die Ebenen E_1 und E_2 sind im $\mathbb{R}^3$ gegeben als die Menge aller Vektoren $(x,y,z)^{\mathrm{t}}$, die

$$E_1 \,:\, x+y+z=1 \qquad \text{und} \qquad E_2 \,:\, x-y+z=-1$$

genügen. Berechnen Sie eine Parameterform von $E_1 \cap E_2$.

b) Es sei P die Menge aller Punkte $p \in \mathbb{R}^3$, die von E_1 und E_2 denselben Abstand haben. Zeigen Sie, dass P die Vereinigung zweier Ebenen ist und bestimmen Sie eine Parameterform dieser beiden Ebenen.

Aufgabe 5:

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $q_\lambda \,:\, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$q_\lambda(x,y) = 2x^2 + \lambda xy + 3y^2$$

sowie

$$Q_\lambda = \{(x,y)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^2 \,:\, q_\lambda(x,y) = 8\}.$$

a) Bestimmen Sie den Typ des Kegelschnittes Q_λ in Abhängigkeit von λ.

b) Bringen Sie den Kegelschnitt $Q_{3/4}$ (also $\lambda = 3/4$) mit Hilfe einer abstandserhaltenden Bewegung auf Normalform. Geben Sie eine Transformationsmatrix explizit an und bestimmen Sie die Halbachsen.