Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Es bezeichne $U := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ (also die Dimension von U als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

b) Sei U' in $\mathbb{R}^n$ die Lösungsmenge einer (weiteren) homogenen Gleichung

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$$

(die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sind aus $\mathbb{R}$; $x_1, \ldots, x_n$ sind Unbestimmte). Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap U')$ in Abhängigkeit der Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$.

Aufgabe 2:

a) Gibt es jeweils eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den angegebenen drei Vorgaben? Begründen Sie Ihre Antwort. (e_1, e_2, e_3 bezeichnen die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^3$.)

(i) $f(e_1) = (2,3,1), f(e_2) = (2,1,3), f(e_3) = (4,4,4)$.

(ii) $f((1,2,3)) = e_1, f((-2,3,0)) = e_2, f((-3,1,-3)) = (-1,1,1)$.

b) Bestimmen die Vorgaben

$$\begin{aligned} g((1,2,-3,-4)) &= (1,2,3,4) \\ g((-2,-2,5,13)) &= (4,3,2,1) \\ g((2,4,-6,-14)) &= (2,2,2,2) \\ g((1,4,-4,-1)) &= (1,0,1,0) \end{aligned}$$

eine eindeutige lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$?

Aufgabe 3:
In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Geraden $g = \{(4,-2,3,5) + \lambda(1,-1,2,0) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{(-1,2,2,3) + \lambda(0,-1,-1,3) | \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie einen Punkt P_g auf g und einen Punkt P_h auf h, deren Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_gP_h}$ sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Berechnen Sie den Abstand zwischen g und h.

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f((1,0)) = (2,3)$ und $f((0,1)) = (-2,-2)$. Gibt es unter all diesen affinen Abbildungen eine Bewegung (d. h. eine Isometrie)?

b) Zeigen Sie, dass $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y+5 \\ x+2 \end{pmatrix}$ eine Bewegung (d. h. eine Isometrie) des $\mathbb{R}^2$ ist. Zeigen Sie, dass g eine Gleitspiegelung ist und berechnen Sie die zugehörige Spiegelungsgerade und den zugehörigen Translationsvektor.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Bestimmen Sie in Abhängigkeit des reellen Parameters t den Typ des Kegelschnitts (in $\mathbb{R}^2$)

$$(1 + 4t)y^2 + x^2 + 2xy + 2tx - (8t^2 - 2t)y = -4t^3 + 1 - t^2.$$