Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es seien $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung, $w_1, \ldots, w_n \in W$ linear unabhängige Vektoren sowie $v_i \in f^{-1}(w_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ebenfalls linear unabhängig.

b) Es seien $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung, $w_1, \ldots, w_n \in W$ linear abhängige Vektoren sowie $v_i \in f^{-1}(w_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ebenfalls linear abhängig.

c) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ genau dann injektiv, wenn die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

die Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Basen

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Fortsetzung nächste Seite!

a) Stellen Sie

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Basiselemente aus B_1 dar.

b) Bestimmen Sie den Bildvektor $f(M)$ der Matrix M bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

c) Ist f surjektiv? (mit Begründung)

Aufgabe 3:

Sei $\varphi_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\varphi_s(x) := A_s x + b := \begin{pmatrix} 1 & s_1 \\ 2 & s_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Vektoren $s \in \mathbb{R}^2$, so dass A_s das Vielfache einer orthogonalen Matrix ist.

b) Betrachten Sie nun φ_s mit $s = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Fixpunkt von φ_s.

c) Es sei weiterhin φ_s mit $s = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Weiter sei m der Fixpunkt von φ_s. Bestimmen Sie ein $\alpha > 0$, so dass φ_s den Kreis

$$K := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - m|| = 1\}$$

auf den Kreis

$$K' := \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x - m|| = \alpha\}$$

abbildet.

(Es bezeichne $|| \cdot ||$ die euklidische Norm.)

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die euklidische Normalform der Quadrik Q, gegeben durch

$$13x^2 - 32xy + 37y^2 = 45,$$

und geben Sie den Typ der Kurve Q an!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (G_t) über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -x + 3z &= 3 \\ -2x - ty + z &= 2 \\ x + 2y + tz &= 1, \end{aligned}$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ eine feste reelle Zahl ist.

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist (G_t) eindeutig lösbar?

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) keine Lösung?

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat (G_t) mehrere Lösungen?

d) Geben Sie in den Fällen der Lösbarkeit die Lösungsmenge von (G_t) an.