Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Es seien $\varphi : W \to U$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

a) Zeigen Sie, dass $\varphi \circ \psi : V \to U$ eine lineare Abbildung ist.

b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

  i) Wenn $\varphi \circ \psi$ injektiv ist, dann ist ψ injektiv.

  ii) Wenn $\varphi \circ \psi$ injektiv ist, dann ist φ injektiv.

  iii) Wenn $\varphi \circ \psi$ surjektiv ist, dann ist ψ surjektiv.

  iv) Wenn $\varphi \circ \psi$ surjektiv ist, dann ist φ surjektiv.

Aufgabe 2:
Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von den Vektoren v_1, v_2 aufgespannten Untervektorraums U.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung

$$v_1 \mapsto 3/5 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 \mapsto 1/5 \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zu einer orthogonalen Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie alle solchen Fortsetzungen.

Aufgabe 3:
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und v_1, v_2 eine Basis von V. Weiter seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die durch

$$\begin{aligned} \varphi(v_1) &= av_1 + bv_2 \\ \varphi(v_2) &= -bv_1 + av_2 \end{aligned}$$

gegeben ist.

Fortsetzung nächste Seite!

a) Es sei $\mathrm{id}_V : V \to V, v \mapsto v$, die identische Abbildung. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mathrm{id}_V, \varphi, \varphi^2$ im Vektorraum der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen von V nach V linear abhängig über $\mathbb{R}$ sind.

b) Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ ist invertierbar} \iff a^2 + b^2 \neq 0\,.$$

c) Stellen Sie im Fall von $a^2 + b^2 = 1$ die Vektoren $\varphi^{-1}(v_1)$ und $\varphi^{-1}(v_2)$ durch v_1 und v_2 dar.

Aufgabe 4:

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ortsvektoren von Punkten in $\mathbb{R}^2$.

Gegeben seien die Dreiecke Δ mit den Ecken A, B und C sowie Δ' mit den Ecken A', B' und C'.

a) Bestimmen Sie die Seitenlängen der beiden Dreiecke.

b) Zeigen Sie, dass eine Bewegung f des $\mathbb{R}^2$, die das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' abbildet, notwendig $f(A) = A'$, $f(B) = C'$ und $f(C) = B'$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass es genau eine Bewegung f des $\mathbb{R}^2$ gibt, die das Dreieck Δ auf das Dreieck Δ' überführt, indem Sie f konkret angeben.

Aufgabe 5:

Es sei $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Weiter sei U_a der von den folgenden Vektoren aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a eine Basis von U_a.

b) Ergänzen Sie jeweils die Basis von U_a aus a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.