Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne V_d die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Unbestimmten X und vom Grad $\leq d$, ferner sei

$$U_{d+1} := \{f \cdot (X-1) \mid f \in V_d\}.$$

Für jedes $d \in \mathbb{N}$:

a) Zeigen Sie $U_{d+1} \subseteq V_{d+1}$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\alpha_d : V_d \to V_{d+1}, f \mapsto f \cdot (X-1)$$

$\mathbb{R}$-linear ist; bestimmen Sie Kern und Bild dieser Abbildung.

c) Bestimmen Sie $\dim(U_{d+1})$.

Aufgabe 2:

Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $s \in \mathbb{R}$ bezeichne $M_s := \begin{pmatrix} s & \dots & s \\ \vdots & & \vdots \\ s & \dots & s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,m}$ die $m \times m$-Matrix, bei der jeder Eintrag s ist. Geben Sie eine Formel für

$$(M_s)^n = M_s \cdot \ldots \cdot M_s$$

(n Faktoren, $n \in \mathbb{N}$ beliebig) an und beweisen Sie diese.

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass es genau eine bijektive affine Abbildung
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass f sogar eine Bewegung (d. h. abstandserhaltend) ist und bestimmen Sie den Typ dieser Bewegung.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:
Gegeben seien in $\mathbb{R}^3$ die Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$g_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Zeigen Sie, dass g_1 und g_2 ein eindeutiges gemeinsames Lot l haben. Zeigen Sie, dass l auch das eindeutige gemeinsame Lot von g_2 und g_3 ist.

b) Folgern Sie, dass l ein gemeinsames Lot von g_1 und g_3 ist. Ist l das einzige gemeinsame Lot von g_1 und g_3?

Aufgabe 5:

a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch die Gleichung

$$5x^2 + 2xy + 5y^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + 14 \cdot \sqrt{2} \cdot y + 10 = 0$$

gegebene Quadrik. Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q als Teilmenge $Q' \subseteq \mathbb{R}^2$.

b) Geben Sie eine Bewegung (d. h. eine abstandserhaltende Selbstabbildung) f von $\mathbb{R}^2$ an, welche Q' in Q überführt, im Sinne $f(Q') = Q$.