Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ seien die $n-1$ Vektoren

$$s_1, \ldots, s_{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

fest gewählt; es bezeichne

$$U = \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$$

den von $s_1, \ldots, s_{n-1}$ erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. Ferner betrachte man die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \det(s_1, \ldots, s_{n-1}, x)\,;$$

die Linearität von f ergibt sich direkt aus den Eigenschaften der Determinante und muss hier nicht nachgeprüft werden.

a) Man zeige $U \subseteq \mathrm{Kern}(f)$.

b) Man bestimme $\dim \mathrm{Kern}(f)$ in Abhängigkeit von $\dim(U)$.

Aufgabe 2:

a) Für den Endomorphismus $\ell_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\ell_A(x) = A \cdot x$, mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

zeige man $\mathrm{Kern}(\ell_A) = \mathrm{Bild}(\ell_A)$.

b) Man bestimme Matrizen $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $C \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, so dass die dadurch gegebenen Endomorphismen

$$\ell_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \ell_B(x) = B \cdot x, \quad \text{und} \quad \ell_C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \ell_C(x) = C \cdot x,$$

die Eigenschaften

$$\mathrm{Kern}(\ell_B) \subsetneq \mathrm{Bild}(\ell_B) \subsetneq \mathbb{R}^4 \quad \text{und} \quad \mathrm{Bild}(\ell_C) \subsetneq \mathrm{Kern}(\ell_C) \subsetneq \mathbb{R}^4$$

besitzen.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
In Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. Man bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die

i) die Matrix M_a sowohl invertierbar als auch diagonalisierbar ist,

ii) die Matrix M_a invertierbar, aber nicht diagonalisierbar ist,

iii) die Matrix M_a nicht invertierbar, aber diagonalisierbar ist,

iv) die Matrix M_a weder invertierbar noch diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4:
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, seien die vier Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Man zeige, dass die Menge g aller Punkte X von $\mathbb{R}^3$, die von A, B und C denselben Abstand besitzen, eine Gerade ist, und gebe eine Parameterdarstellung von g an.

b) Man bestimme den Mittelpunkt M und den Radius r der Umkugel des Tetraeders mit den Ecken A, B, C, D. Man entscheide mit Begründung, ob M im Inneren des Tetraeders liegt.

Aufgabe 5:
Man betrachte die Quadrik

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid s\,x^2 + 2\,x\,y + s\,y^2 + 2\,x + 2\,y - 1 = 0 \right\}$$

und bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ ihre euklidische Normalform sowie ihren Typ.