Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Zu $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$ sei $\mathcal{L}_{A,b}$ die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$.

a) Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt es ein $b \in \mathbb{R}^2$, so dass $\mathcal{L}_{A,b}$ genau aus einem Punkt besteht.
   ii) Für alle $b \in \mathbb{R}^2$ gibt es ein $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $\mathcal{L}_{A,b}$ genau aus einem Punkt besteht.
   iii) Ist $\mathcal{L}_{A,b}$ ein Untervektorraum, so ist $b = 0$.

b) Bestimmen sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass für $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\mathcal{L}_{A,b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2:
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Spaltenraumes U von A.
b) Bestimmen Sie alle $y \in U^{\perp}$, so dass $e - y \in U$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Es sei

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass S im $\mathbb{R}^3$ eine Spiegelung beschreibt und berechnen Sie die Spiegelebene.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A := SDS$.

Aufgabe 4:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix und

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad X \mapsto AXA^{-1}.$$

Zeigen Sie:

a) f ist eine lineare Abbildung.

b) Die Menge $U_A := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid f(X^\top) = f(X)^\top\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

c) Ist A orthogonal, so ist $U_A = \mathbb{R}^{n\times n}$.

d) 1 ist ein Eigenwert von f.

e) 0 ist kein Eigenwert von f.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Kegelschnitte

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 - 2x_2 + 1 = 0\right\}$$

und

$$Q_t = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + tx_2^2 - 2tx_2 + t - 1 = 0\right\},$$

wobei t ein reeller Parameter ist. Für welche Werte von t sind Q und Q_t kongruent (d.h. metrisch äquivalent)?