Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei

$$f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A_t \cdot \mathbf{x}$$

die vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Abbildung mit darstellender Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t^3 & t^2 & 1 \\ t^2 & t & 1 \\ t^2+t & t^2+t & 2 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das Urbild

$$F_t := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A_t \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

ein affiner Raum der Dimension 2?

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist F_t eine Ebene, die parallel zur Ebene

$$E : x + y + z = 2 \subset \mathbb{R}^3$$

liegt?

c) Bestimmen Sie den Abstand zwischen E und F_1.

Aufgabe 2:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -3 \\ 6 & -1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.

Fortsetzung nächste Seite!

c) Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist.

d) Sei nun

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob es eine Basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ von $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der sowohl A als auch B Diagonalform haben. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3:

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt "$\circ$" sei $U = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ der lineare Unterraum mit

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis für $U^\perp$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $\operatorname{Kern}(f) = U$ und $\operatorname{Bild}(f) = U^\perp$ und $\mathbf{e}_1 \circ f(\mathbf{e}_1) = 4$. Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix A.

c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von f.

d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$, welche aus Eigenvektoren von f besteht.

Aufgabe 4: affine

Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bilde die Punktmenge $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ auf die Punktmenge $\{\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ (nicht notwendigerweise in dieser Reihenfolge) ab. Dabei ist

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass es genau zwei Möglichkeiten für g gibt.

b) Zeigen Sie, dass eine davon eine Drehung ist. Bestimmen Sie das zugehörige Drehzentrum und den Drehwinkel.

c) Zeigen Sie, dass die andere Möglichkeit eine Gleitspiegelung ist. Bestimmen Sie die zugehörige Spiegelachse und den Verschiebungsvektor.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch Erklärung oder Widerlegung. Alle Matrizen sind dabei reell.

a) Für jede diagonalisierbare 2×2-Matrix gibt es eine orthogonale Basis aus Eigenvektoren.

b) Sei λ ein Eigenwert einer 3×3-Matrix A mit

$$A^2 - 2A = -E_3,$$

wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet.

Dann ist $\lambda = 1$.

c) Seien A und B zwei 3×3-Matrizen mit Spaltenraum(BA) = Spaltenraum(B). Dann ist A invertierbar.

d) Eine Gleichung der Form $x^2 + y^2 + ax + b = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ immer eine Ellipse.

e) Eine Gleichung der Form $x^2 + y + ax + b = 0$ definiert im $\mathbb{R}^2$ immer eine Parabel.

f) Seien U_1, U_2 und U_3 Unterräume eines reellen Vektorraumes V. Wenn $U_2 \subseteq U_3$ gilt, dann gilt auch $U_1 + U_2 \subseteq U_1 + U_3$.