Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Im $\mathbb{R}$–Vektorraum V aller reellen Polynome p mit $\mathrm{Grad}(p) \leq 3$ betrachte man den von

$$p_1 = X^3 - X^2, \quad p_2 = X^3 - X, \quad p_3 = X^2 - X \quad \text{und} \quad p_4 = X^3 - 1$$

erzeugten Untervektorraum U von V.

a) Man zeige: U ist die Menge aller Polynome $p \in V$, die eine Nullstelle bei 1 besitzen.

b) Man wähle aus p_1, p_2, p_3, p_4 eine Basis von U aus und ergänze diese zu einer Basis von V.

Aufgabe 2:

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ bezeichne $\mathbb{R}^{n \times n}$ den $\mathbb{R}$–Vektorraum aller reellen $n \times n$–Matrizen. Für fest gewählte reelle Zahlen a und b betrachte man die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, \quad f(X) = a\,X + b\,X^\top,$$

wobei $X^\top$ die zu X transponierte Matrix bezeichne. Man zeige:

a) f ist eine lineare Abbildung.

b) $a + b$ und $a - b$ sind Eigenwerte von f.

c) f ist genau dann bijektiv, wenn $a^2 \neq b^2$ ist.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

a) Man bestätige: $\det(M) = -108$.

b) Man zeige, dass $\lambda = 3$ ein Eigenwert der Matrix M mit einem Eigenraum der Dimension 3 ist.

c) Man folgere aus a) und b), dass M einen weiteren Eigenwert $\mu \neq \lambda$ besitzt, und entscheide mit Begründung, ob M diagonalisierbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist durch

$$\sigma(x,y) = 4\,x_1\,y_1 - 8\,x_1\,y_2 - 8\,x_2\,y_1 + 25\,y_1\,y_2$$

für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ eine Bilinearform $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben.

a) Man zeige, dass σ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Man berechne eine Orthonormalbasis des euklidischen Vektorraums $(\mathbb{R}^2, \sigma)$, also bezüglich des Skalarprodukts σ aus a).

c) Man bestimme eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass

$$\ell_A : (\mathbb{R}^2, \sigma) \to (\mathbb{R}^2, \circ), \quad \ell_A(x) = A \cdot x,$$

eine orthogonale Abbildung ist, also

$$\sigma(x,y) = \ell_A(x) \circ \ell_A(y) \qquad \text{für alle} \quad x,\, y \in \mathbb{R}^2$$

gilt; dabei bezeichne $\circ$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5:

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y ist durch die Gleichung

$$8\,x^2 - 12\,x\,y + 17\,y^2 + 44\,x - 58\,y + 48 = 0$$

eine Quadrik Q gegeben.

a) Man zeige, dass Q eine Ellipse ist, und bestimme die euklidische Normalform von Q.

b) Man berechne den Mittelpunkt sowie die Scheitelpunkte von Q und skizziere Q im x–y–Koordinatensystem.