Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen betrachte man den von

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum U sowie den von

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum W.

a) Man ermittle die Dimensionen $\dim(U)$ und $\dim(W)$ von U und W.
b) Man bestimme eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $U \cap W = \mathbb{R} \cdot C$.
c) Man berechne $\dim(U + W)$.
d) Man ergänze die Matrix C von b) zu einer Basis von $U + W$.

Aufgabe 2:

In Abhängigkeit von den reellen Parametern α und β sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gegeben. Man entscheide mit Begründung, für welche Wahl von α und β es

a) keine bzw. b) genau eine bzw. c) mehr als eine

lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3$$

gibt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

In Abhängigkeit vom reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$M_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ c & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben.

a) Man untersuche M_c (in Abhängigkeit von c) auf reelle Diagonalisierbarkeit.

b) Man bestimme für $c = 4$ eine invertierbare Matrix $P \in GL_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $P^{-1}M_4P = D$.

Aufgabe 4:

Gegeben sei der euklidische Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt sowie den Koordinaten x_1, x_2, x_3. Für eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sei

$$f_S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_S(x) = S\,x\,,$$

die zugehörige lineare Abbildung.

a) Man bestimme die beiden Matrizen $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass f_S eine Drehung um die x_2-Achse mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{4}$ ist.

b) Man bestimme diejenige Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass f_S die Spiegelung an der Ebene E mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist.

c) Man bestimme eine Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass f_S eine orthogonale Abbildung ist, die weder eine Drehung noch eine Spiegelung ist.

Aufgabe 5:

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ werde für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Quadrik

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4\,x\,y - 2\,y^2 - 12\,x + 12\,y - 6\,t = 0 \right\}$$

betrachtet. Man bestimme (in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$) die euklidische Normalform sowie den Typ von Q_t.