## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

a) Man berechne die Determinante von $B$.

b) Man zeige mit Hilfe von a), dass die Matrix $C = -\frac{1}{2}B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ die Determinante $\det(C) < -1$ besitzt.

c) Man untersuche, ob es eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $F^2 = C$ gibt.

**Aufgabe 2:**

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen $2 \times 2$-Matrizen werde eine invertierbare Matrix $M$ fest gewählt. Man betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(X) = M\left(X + X^\top\right).$$

Dabei bezeichne $X^\top$ die zu $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ transponierte Matrix.

a) Man zeige, dass $f$ eine lineare Abbildung ist.

b) Man bestimme eine Basis für den Kern von $f$.

c) Man entscheide, ob es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$f(X) = AX \qquad \text{für alle} \qquad X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

gibt, und begründe die Entscheidung.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 3:**

Man betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

mit der zugehörigen linearen Abbildung

$$f_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad f_A(x) = A\,x;$$

ferner seien die beiden Vektoren

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \text{und} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

gegeben.

a) Man zeige, dass $\lambda = -1$ ein Eigenwert von $f_A$ mit einem zweidimensionalen Eigenraum ist, und bestimme eine Basis $v_1$, $v_2$ dieses Eigenraums.

b) Man zeige, dass $w \in \mathbb{R}^4$ ein Eigenvektor von $f_A$ ist, und bestimme den zugehörigen Eigenwert.

c) Man zeige, dass $v_1$, $v_2$, $w$, $e_1$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

d) Man bestimme die darstellende Matrix von $f_A$ bezüglich dieser Basis $v_1$, $v_2$, $w$, $e_1$ von $\mathbb{R}^4$.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:**

Im euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$, versehen mit dem Standardskalarprodukt, sind die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gegeben.

a) Man bestimme eine Orthonormalbasis $b_1$, $b_2$, $b_3$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$\operatorname{span}\{b_1\} = \operatorname{span}\{v_1\} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{span}\{b_1, b_2\} = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}.$$

b) Man bestimme eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass die lineare Abbildung

$$f_D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f_D(x) = D\,x,$$

eine Drehung um den Winkel $\varphi$ mit $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ mit der Drehachse $\mathbb{R} \cdot v_1$ ist.

**Aufgabe 5:**

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ werde für den Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Quadrik

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2t\,x\,y + t^2\,y^2 + t\,x - y + t^2 + 1 = 0 \right\}$$

betrachtet.

a) Man bestimme (in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$) die euklidische Normalform sowie den Typ von $Q_t$.

b) Man skizziere (für $t = 1$) die Quadrik $Q_1$ im $(x, y)$-Koordinatensystem.