Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$ betrachte man die lineare Abbildung

$$f_t : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -a+b & c \\ t^2 b & d \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von f_t sowie jeweils eine Basis des zugehörigen Eigenraums.

b) Bestimmen Sie diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für welche f_t nicht diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2:
Für den reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$ seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für die es

a) keine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

b) genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

c) unendliche viele Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

gibt, mit der Eigenschaft

$$f(v_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}^3$, welche die Gleichung $Ax = (x^\top Ax)x$ erfüllen.

Aufgabe 4:
Es sei

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$, welches durch die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt wird. Man bestimme alle Skalarprodukte

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

für welche gilt: Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, w \rangle = 0$, dann gilt auch $(v, w) = 0$.

Aufgabe 5:
Sei Q definiert durch

$$Q = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 - 3y^2 - 8xy + 2x - 6y = 0 \}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q und bestimmen Sie eine Bewegung, welche Q auf ihre euklidische Normalform abbildet.