Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Wahr oder falsch: Begründen Sie Ihre Antwort durch Erklärung oder Widerlegung.

a) Ein reelles lineares Gleichungssystem kann genau zwei Lösungen haben.

b) Eine $n \times n$-Matrix A mit reellen Koeffizienten hat n reelle Eigenwerte.

c) Sind A und B zwei invertierbare $n \times n$-Matrizen, so ist $A + B$ invertierbar.

d) Die Komposition zweier Spiegelungen der Ebene

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

ist wieder eine Spiegelung der Ebene.

Aufgabe 2:
Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt) seien die Ebene $E : x+y = 0$ und der Vektor $\mathbf{u} = (0, 0, 1)^t \in E$ gegeben.

a) Ergänzen Sie $\mathbf{u}$ zu einer orthonormalen Basis von E.

b) Ergänzen Sie die in a) bestimmte Basis zu einer orthonormalen Basis von $\mathbb{R}^3$.

c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ die lineare Abbildung, die E als Eigenraum zum Eigenwert 2 und die $E^\perp$ als Eigenraum zum Eigenwert 0 hat. Bestimmen Sie die zu f zugehörige Matrix A bezüglich der kanonischen Basis.

Aufgabe 3:
Gegeben seien die zwei Quadriken $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^2$

$$Q_1 : x^2 + 2xy + 3\sqrt{2}x + y^2 + 5\sqrt{2}y = -2$$
$$Q_2 : x^2 - 4x + y = -3$$

Prüfen Sie, ob es eine Bewegung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(Q_1) = Q_2$ gibt. Falls eine solche Bewegung existiert, bestimmen Sie eine solche.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Das folgende Rätsel sei gegeben.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\square & + & \Diamond & + & \bigcirc & + & \text{⬠} & = & 15 \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\text{⬠} & + & \triangle & + & \Diamond & + & \square & = & 21 \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\Diamond & + & \bigcirc & + & \square & + & \text{⬠} & = & C \\
+ & & + & & + & & + & & \\
\triangle & + & \bigcirc & + & \Diamond & + & \triangle & = & D \\
\parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\
A & & 19 & & B & & 24 & &
\end{array}
$$

Es sollen positive ganze Zahlen $\{1, 2, \ldots, 9\}$ in die Felder eingetragen werden, so dass die Summe der Zahlen in einer Zeile bzw. einer Spalte die am Rand angegebene Zahl ergibt. Felder mit dem gleichen Symbol (Kreis, Quadrat etc.) enthalten dieselbe Zahl.

a) Beschreiben Sie das obige Rätsel als lineares Gleichungssystem und bringen Sie die zugehörige Matrix in Zeilenstufenform.

b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Rätsels und die zugehörigen Summen A, B, C und D.

Aufgabe 5:

Gegeben seien die von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$ abhängigen Geraden $g_s, h_t \in \mathbb{R}^3$:

$$
g_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{rcrcrl} x & + & ty & - & z & = 0 \\ -x & + & ty & - & z & = 0 \end{array} \right\}.
$$

a) Bestimmen Sie alle Werte von $s, t \in \mathbb{R}$, für die g_s und h_t windschief sind.

b) Bestimmen Sie alle Werte von $s, t \in \mathbb{R}$, für die g_s und h_t den Abstand $\frac{1}{\sqrt{2}}$ haben.