Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Man bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge L_α des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & \alpha x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & \alpha x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 2:
Man betrachte den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit der Standardbasis e_1, e_2, e_3, e_4 sowie den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraum $V = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Ferner sei die lineare Abbildung

$$f : V \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = A \cdot x, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Man bestimme die Dimension von V und gebe eine Basis von V an.
b) Man berechne die darstellende Matrix von f bezüglich der in a) gewählten Basis von V und der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$.
c) Man bestimme eine Basis des Kerns von f.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:
Man betrachte einen $\mathbb{R}$–Vektorraum V mit $V \neq \{0_V\}$ sowie eine lineare Abbildung $f : V \to V$. Man zeige:

a) f ist genau dann injektiv, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von f ist.

b) Ist f bijektiv und $v \in V$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist v ein Eigenvektor von f^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

c) Ist $\dim(V) < \infty$ sowie f bijektiv und diagonalisierbar, so ist auch f^{-1} diagonalisierbar.

Aufgabe 4:
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$a' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c' = \begin{pmatrix} -2 \\ s \end{pmatrix}$$

gegeben; dabei ist $s \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Man zeige, dass es genau eine affine Abbildung $f_s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f_s(a) = a', \qquad f_s(b) = b' \qquad \text{und} \qquad f_s(c) = c'$$

gibt, und gebe ihre Abbildungsvorschrift explizit an.

b) Für welchen Wert von $s \in \mathbb{R}$ ist f_s eine Bewegung? Man zeige, dass in diesem Fall f_s eine Drehung ist, und bestimme das Drehzentrum und den Drehwinkel von f_s.

Aufgabe 5:
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ sind die beiden Quadriken

$$Q_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - 4\,x\,y - 2\,y^2 = 6 \right\}$$

und

$$Q_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3\,x^2 + 6\,x\,y - 5\,y^2 = 12 \right\}$$

gegeben.

a) Man zeige mit Hilfe der euklidischen Normalform, dass Q_1 und Q_2 euklidisch äquivalent sind.

b) Man bestimme eine Bewegung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(Q_1) = Q_2$.