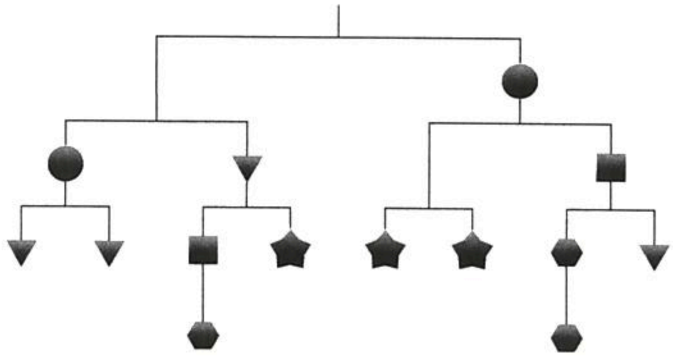
Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Im Mobile



seien alle horizontalen Stäbe und alle Fäden als gewichtslos angenommen. Alle Stäbe sind genau im Mittelpunkt aufgehängt. Anhänger der gleichen Form haben dieselbe Masse. Insgesamt wiegt das Mobile 320 g.

a) Beschreiben Sie den Gleichgewichtszustand des Mobiles durch ein inhomogenes lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie die Masse der Anhänger, für die sich das Mobile im Gleichgewicht befindet.

2. Aufgabe

Sei Q_s die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Quadrik

$$Q_s : x^2 + 2xy + (s+1)y^2 + 2x - (2s^2 - 2)y + 1 = 0.$$

Bestimmen Sie den affinen Typ von Q_s in Abhängigkeit von s.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Betrachten Sie die folgenden Unterräume

$$E = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad F = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

a) Zeigen Sie $E + F + G = \mathbb{R}^3$.

b) Für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gelte:

- E ist Eigenraum zum Eigenwert 2,
- F ist Eigenraum zum Eigenwert -1 und
- $G = \mathrm{Kern}(f)$.

Bestimmen Sie die zu f gehörige Matrix im Bezug zur kanonischen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe

Gegeben seien die Punkte

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Bewegung mit

$$\mathbf{u}' := f(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}' := f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Möglichkeiten für $\mathbf{w}' := f(\mathbf{w})$.

b) Bestimmen Sie für jede der oben genannten Möglichkeiten den Typ der Bewegung f und die zugehörigen Eigenschaften (je nach Fall Drehzentrum, Drehwinkel, Translationsvektor, Spiegelachse oder Schubvektor).

5. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix, deren Zeilenvektoren alle gleich sind.

Untersuchen Sie A (zum Beispiel in Abhängigkeit von ihrer Spur) auf Diagonalisierbarkeit.