Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Für $a \in \mathbb{R}$ sei die reelle Matrix

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Determinante von M_a den Wert

$$\det M_a = a^4 - 2a^2 + 1$$

hat.

b) Sei $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für welche die Lösungsmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^4 : \; M_a x = b\}$$

mehr als ein Element hat. Geben Sie in diesem Fall / diesen Fällen die Lösungsmenge konkret an.

Fortsetzung nächste Seite!

2. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

c) Finden Sie eine invertierbare Matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $X^{-1}AX$ eine Diagonalmatrix ist.

3. Aufgabe

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Sei $S : V \to V$ die Abbildung, die jedem Polynom $p(x)$ das Polynom $p(x-1)$ zuordnet.

a) Zeigen Sie, dass S eine lineare Abbildung (und damit ein Endomorphismus von V) ist.

b) Zeigen Sie, dass 0 kein Eigenwert von S ist.

c) Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von S ist, und geben Sie einen zugehörigen Eigenvektor an.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ -2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

wobei a, b, c reelle Zahlen seien.

a) Bestimmen Sie alle $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, für welche die Matrix A orthogonal ist.

b) Für welche $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt A eine Drehung? Geben Sie den Cosinus des Drehwinkels sowie die Drehachse an.

c) Für welche $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beschreibt A eine Spiegelung? An welchem Unterraum wird gespiegelt?

5. Aufgabe

Sei Q die Menge aller Punkte in der euklidischen Ebene, deren Abstände zur Winkelhalbierenden $\mathbb{R} \cdot \binom{1}{1}$ und zum Punkt $\binom{0}{\sqrt{2}}$ gleich sind.

Zeigen Sie, dass Q ein Kegelschnitt ist, und bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von Q.