Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Bestimmen Sie alle Matrizen $\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 42 \\ 84 & 98 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

Wir betrachten den Vektorraum P_3 aller reellen Polynome in der Unbestimmten T und vom Grad höchstens 3.

a) Bestimmen Sie die Dimension von

$$U := \operatorname{span}\left\{2T^3 - T - 1, T^3 + T^2 - 2T, T^2 - 3T + 2, 4T^3 + T^2 - 6T + 1\right\}.$$

b) Gegeben sei die lineare Abbildung

$$f : P_3 \to \mathbb{R}, p \mapsto p(1).$$

Beweisen Sie

$$U = \operatorname{Kern}(f).$$

c) Bestimmen Sie alle reellen Parameter-Werte λ, für welche

$$(2\lambda - 1)T^3 + (\lambda + 2)T^2 + (-\lambda + 1)T + (-\lambda - 3)$$

in U liegt.

3. Aufgabe

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, für welche $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Zeigen Sie, dass A nicht orthogonal diagonalisierbar ist, d. h. dass es keine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gibt, für welche $S^\top AS$ Diagonalgestalt hat.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Gegeben sei der Untervektorraum

$$U = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U bzgl. des Standard-Skalarproduktes.

b) Bestimmen Sie eine Drehspiegelung des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ mit Drehwinkel $\frac{\pi}{6}$ und Spiegelungsebene U.

5. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die beiden ebenen Quadriken

$$Q_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$Q_2 : 7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 - (4 + 8\sqrt{3})x + (8 - 4\sqrt{3})y = -8$$

zwar affin, aber nicht metrisch äquivalent sind.