Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachte man den von

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum U sowie den von

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraum W. Man bestimme eine Basis von $U \cap W$.

2. Aufgabe

a) Man bestimme alle Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist, und berechne in diesen Fällen die zu M_α inverse Matrix.

Fortsetzung nächste Seite!

b) Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sowie

$$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Man zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(v_1) = w_1, \quad f(v_2) = w_2 \quad \text{und} \quad f(v_3) = w_3$$

gibt, und bestimme die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $f(x) = A\,x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

3. Aufgabe

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der reellen 2×2-Matrizen mit der Standardbasis

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist der von B_1, B_2, B_3 aufgespannte Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Ferner werde für die fest gewählte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

die Abbildung

$$f : V \to \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad f(X) = AX + X^\top A,$$

betrachtet; dabei bezeichnet $X^\top$ die zu $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ transponierte Matrix.

a) Man zeige, dass f linear ist.

b) Man bestimme die darstellende Matrix M von f bezüglich der Basis B_1, B_2, B_3 von V und der Basis B_1, B_2, B_3, B_4 von $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) Man bestimme eine Basis von Kern(f) und eine Basis von Bild(f).

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Man entscheide, ob es eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ mit $P^\top AP = D$ gibt, und bestimme gegebenenfalls eine solche Matrix P; dabei bezeichne $P^\top$ die zu P transponierte Matrix.

5. Aufgabe

Gegeben ist die Quadrik

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,x\,y + s^2y^2 + 2\,x + 2\,s\,y + 1 = 0 \right\};$$

dabei ist $s \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Man bestimme in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{R}$ den affinen Typ von Q_s.

b) Es sei nun $s = 3$ gewählt; ferner sei

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 = 1 \right\}.$$

Man entscheide, ob es eine bijektive affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t, \qquad \text{mit} \qquad f(Q_3) = K$$

gibt, und gebe gegebenenfalls eine geeignete Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einen geeigneten Vektor $t \in \mathbb{R}^2$ an.