Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Es sei $U_1 := \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_4\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter seien

$$U_2 := \{(x_1, \ldots, x_4)^\top \mid x_1 + x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

und

$$U := U_1 \cap U_2.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

b) Es sei M die Menge der $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \quad \text{mit } F(u) = 0 \text{ für alle } u \in U.$$

Zeigen Sie, dass M ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie eine Basis von M.

2. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Weiter sei $F \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Ist $\operatorname{Rang}(F) = \operatorname{Rang}(F^2)$, so gilt $\operatorname{Kern}(F) = \operatorname{Kern}(F^2)$.

b) Ist $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$\det(A^2 + A) = 0,$$

so ist -1 ein Eigenwert von A.

c) Es gibt einen endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Skalarprodukt und unendlich viele paarweise verschiedene Vektoren

$$v_1, v_2, v_3, \ldots \in V \setminus \{0\},$$

die zueinander paarweise orthogonal sind.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

a) Es seien A, B zudem positiv definit. Zeigen Sie:

$$\det(A+B) > 0.$$

b) Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie:
Für alle $v \in \operatorname{Kern}(A - \lambda_1 E_n)$ und alle $w \in \operatorname{Kern}(A - \lambda_2 E_n)$ gilt:

$$v^\top A w = 0.$$

c) Es sei A positiv definit. Weiter sei

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^\top A x = 1\}.$$

Zeigen Sie:
Es gibt Eigenwerte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ von A mit

$$\frac{1}{\alpha} \leq x^\top x \leq \frac{1}{\beta} \quad \text{für alle } x \in M.$$

4. Aufgabe

Es sei $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ die lineare Abbildung, gegeben durch $f(x) = A \cdot x$, wobei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -6 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$.

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement des Bildes von f bezüglich des Standardskalarprodukts.

5. Aufgabe

Es sei Q die folgende Quadrik in $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - 8xy + 8y^2 - 3x + y = 0\}.$$

Bestimmen Sie eine Bewegung, welche Q auf ihre euklidische Normalform abbildet, und bestimmen Sie diese euklidische Normalform sowie deren Typ.