Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

a) Bestimmen Sie alle reellen, quadratischen Polynome p mit

$$p(-1) = 2 \qquad p(0) = 3 \qquad p(1) = 6 \tag{$*$}$$

b) Bestimmen Sie ein reelles, *nicht-quadratisches* Polynom p, welches ebenfalls die Bedingungen $(*)$ aus a) erfüllt.

2. Aufgabe

Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie eine beliebige quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ werde die Matrix

$$A = P^\top BP \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

sowie die zugehörige Bilinearform

$$\sigma_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \sigma_A(x,y) = x^\top Ay$$

auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ betrachtet.

a) Man zeige, dass die Bilinearform σ_A symmetrisch ist und

$$\sigma_A(x,x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

b) Man zeige, dass die Bilinearform σ_A genau dann ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ist, wenn die Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist.

3. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} s & s-1 & 1-s \\ 0 & s^2 & 1-s^2 \\ 0 & s^2-1 & 2-s^2 \end{pmatrix},$$

welche von einem reellen Parameter s abhängt.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s alle Eigenwerte von A_s mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

b) Bestimmen Sie, für welche Werte von s die Matrix A_s diagonalisierbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

4. Aufgabe

Berechnen Sie die Abbildungsvorschrift der Spiegelung an der durch die Gleichung $x+2y+2z=\frac{9}{2}$ gegebenen Ebene in $\mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe

Wir betrachten die durch

$$-4x^2+24xy-11y^2+80x+60y=0$$

gegebene ebene Quadrik H in $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von H.

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt und alle Scheitel von H.