Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Es sei das Problem:

> Jetzt hat man 2 Rinder <und> 5 Schafe verkauft <und> damit 13 Schweine gekauft, <wobei> ein Rest von 1000 Geldstücken <übrig> blieb. Man hat 3 Rinder <und> 3 Schweine verkauft <und> damit 9 Schafe gekauft; das Geld reichte gerade. Man hat 6 Schafe <und> 8 Schweine verkauft <und> damit 5 Rinder gekauft, <aber> das Geld reichte nicht <um> 600 <Geldstücke>.
> Frage: Wie hoch ist der Preis von jedem, vom Rind, vom Schaf <und> vom Schwein?
>
> (aus: Vogel, K. (2013): *Chiu Chang Suon Shu / Neun Bücher Arithmetischer Technik: Ein chinesisches Rechenbuch für den praktischen Gebrauch aus der frühen Hanzeit (202 v. Chr.).* Vieweg+Teubner)

a) Beschreiben Sie das Problem als lineares Gleichungssystem.

b) Verwenden Sie den Gauß-Algorithmus, um eine Lösung zu bestimmen.

2. Aufgabe

Sei $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

a) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Menge R aller reellen $n \times n$-Matrizen, für die $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass die Menge S aller reellen $n \times n$-Matrizen, für die $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist, einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet.

c) Sei S wie in Teil b) mit $n = 2$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine Basis von S.

Fortsetzung nächste Seite!

3. Aufgabe

a) Sei E der durch die Gleichung $2x - y + 2z = 0$ gegebene Unterraum des $\mathbb{R}^3$ und sei

$$P_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$$

die orthogonale Projektion auf E. Bestimmen Sie die Matrix A.

b) Sei F der durch die Gleichung $2x - y + 2z = 3$ gegebene affine Unterraum des $\mathbb{R}^3$ und

$$P_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto B\mathbf{x} + \mathbf{t}$$

die orthogonale Projektion auf F. Bestimmen Sie die Matrix B und den Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$.

4. Aufgabe

Sei $Q_{s,t}$ die von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$, $(s,t) \neq (0,0)$ abhängige Quadrik

$$sx^2 + 2txy + sy^2 + 2\sqrt{2}sx + 2\sqrt{2}ty - s^2 - 1 = 0$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform von $Q_{s,t}$ und geben Sie eine Bewegung an, die $Q_{s,t}$ auf diese Normalform abbildet.

b) Bestimmen Sie, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ die Quadrik $Q_{s,t}$ affin äquivalent zur Quadrik $x^2 + y^2 = 1$ ist.

c) Bestimmen Sie, für welche $s, t \in \mathbb{R}$ die Quadrik $Q_{s,t}$ metrisch äquivalent zur Quadrik $x^2 + y^2 = 1$ ist.

5. Aufgabe

Gegeben seien die Geraden

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$g_s = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{ccccccc} sx & - & y & & & = & 0 \\ x & - & y & + & sz & = & 1 \end{array} \right\},$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Bestimmen Sie, für welche $s \in \mathbb{R}$ es eine Ebene $E_s \subset \mathbb{R}^3$ gibt, die f und g_s enthält. Geben Sie in diesen Fällen jeweils eine Gleichung der Ebene E_s an.