Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Es sei U der Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, welcher von den Vektoren

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Weiter sei V das Erzeugnis von

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^5$.

Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$ und eine Basis von $U + V$.

Fortsetzung nächste Seite!

2. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit Rang $(A) \geq \max\{n, m\}$, so ist A eine invertierbare Matrix.

b) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, dann gibt es eine orthogonale Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$BAB^{-1} = D.$$

c) Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $2n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension n. Dann gibt es eine lineare Abbildung $F : V \to V$ mit

$$\mathrm{Bild}(F) = \mathrm{Kern}(F) = U.$$

3. Aufgabe

Es sei

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $b \in \mathbb{R}^3$, welches E als Lösung hat.

b) Bestimmen Sie ein windschiefes Geradenpaar (G_1, G_2) mit $G_1 \subseteq E$ und $G_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus E$, welches den Abstand 1 zueinander hat.

4. Aufgabe

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit Skalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}.$$

a) Sei $\mathrm{End}(V)$ der Vektorraum aller linearer Abbildungen von V nach V.
Zeigen Sie: Ist $0 \neq v \in V$, so ist die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{End}(V) \to \mathbb{R}, \quad F \mapsto \langle v, F(v)\rangle$$

linear.

b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von φ.

Fortsetzung nächste Seite!

5. Aufgabe

Es sei Q die folgende Quadrik in $\mathbb{R}^2$:

$$Q = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 4u^2 - 6uv - 4v^2 + 2\sqrt{5}u + 6\sqrt{5}v + 10 = 0\}.$$

Bestimmen Sie die euklidische Normalform von Q sowie eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$, welche Q auf ihre euklidische Normalform abbildet.