Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Sei $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome in X mit Grad ≤ 3 versehen mit dem durch

$$(X^i, X^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } 0 \leq i, j \leq 3$$

festgelegten Skalarprodukt. Sei $U := \{\, p(X) \in V \mid p(1) = 0 \,\} \subseteq V$ die Teilmenge aller Polynome mit Nullstelle 1.

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

b) Zeigen Sie, dass $p(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ ein Element von U ist und ergänzen Sie $p(X)$ zu einer orthogonalen Basis von U.

c) Bestimmen Sie eine Basis von $U^{\perp}$.

2. Aufgabe

Sei

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ s & 1 & s \\ 0 & -s & -s^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad \mathbf{b}_s = \begin{pmatrix} 2s \\ s^2+1 \\ -s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

wobei $s \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist. Sei

$$f_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \mapsto A_s\mathbf{x}$$

die von A_s definierte lineare Abbildung.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von s die Lösungsmenge $\mathbb{L}_s$ der Gleichung $f_s(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_s$.

b) Betrachten Sie die Gerade

$$g = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die g und $\mathbb{L}_s$

i) sich schneiden, bzw. *ii)* gleich, *iii)* windschief oder *iv)* parallel sind.

3. Aufgabe

Entscheiden Sie begründet, ob es eine Basis des $\mathbb{R}^3$ gibt, bezüglich der beide Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalgestalt haben, und geben Sie gegebenenfalls eine solche Basis an.

4. Aufgabe

Gegeben seien die Spiegelung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Gerade $y + x = 3$ und die Drehung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel $\frac{3\pi}{2}$ um den Punkt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Sei
$$\varphi := g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{t}$$
die Verknüpfung. Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor $\mathbf{t}$.

b) Bestimmen Sie den Typ der Bewegung φ und ihre bestimmenden Merkmale (z.B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.).

5. Aufgabe

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt seien die Punkte

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Menge
$$M := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{v}\| = 8 \}$$
gegeben.

a) Zeigen Sie, dass M Teilmenge einer Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ ist.

b) Bestimmen Sie den Mittelpunkt $\mathbf{m}$, die Hauptachsen und die euklidische Normalform von Q.