Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ invertierbar ist, und bestimmen Sie die inverse Matrix $B^{-1} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

b) Bestimmen Sie alle Matrizen $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A \cdot B = B \cdot X$$

und zeigen Sie, dass hierfür

$$\det(X) = \det(A)$$

gilt.

2. Aufgabe

In Abhängigkeit von den Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ werde die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha & \gamma & \beta \\ -1 & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

sowie die zugehörige lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = A \cdot x$$

betrachtet. Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(f) \qquad \text{und zugleich} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Bild}(f).$$

3. Aufgabe

Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum der Dimension $\dim(V) = 3$; ferner sei b_1, b_2, b_3 eine Basis von V.

a) Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : V \to V$ mit

$$f(b_1) = -b_2 + b_3, \quad f(b_1 + b_2) = -b_1 - b_2, \quad f(b_2 + b_3) = b_2 - b_3$$

gibt, und bestimmen Sie die darstellende Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ von f bezüglich der Basis b_1, b_2, b_3 von V.

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ aus a) und geben Sie für jeden Eigenraum eine Basis an.

c) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung $f : V \to V$ aus a) diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Basis von V aus Eigenvektoren von f an.

4. Aufgabe

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen über $n \times n$–Matrizen für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer orthogonalen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

b) Eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, ist orthogonal.

c) Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die höchstens die Eigenwerte $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$ besitzt, ist orthogonal.

5. Aufgabe

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Quadrik

$$Q_t = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (2\,t + 1)(x^2 + y^2) + 2\,x\,y + \sqrt{2}\,(x - y) = 0 \right\}$$

gegeben; dabei ist $t \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ die euklidische Normalform der Quadrik Q_t.

b) Skizzieren Sie die Quadrik Q_0 im x–y–Koordinatensystem.