Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

1. Aufgabe

Sei A jeweils eine beliebige invertierbare Matrix. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen:

a) A^2 ist invertierbar.

b) $AA^\top$ ist invertierbar.

c) $A + A^\top$ ist invertierbar.

2. Aufgabe

Gegeben seien der affine Unterraum E von $\mathbb{R}^3$ in Parameterform

$$E := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

und die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y + 2z + 1 \\ x + y + z - 3 \\ 2x + y - 5 \end{pmatrix} .$$

a) Berechnen Sie $f(E)$ in Parameterform.

b) Schreiben Sie E als Lösungsmenge einer linearen Gleichung.

c) Berechnen Sie $f^{-1}(E)$.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom reellen Parameter s alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, welche gleichzeitig folgende zwei Bedingungen erfüllen:

$$A \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} .$$

4. Aufgabe

In $\mathbb{R}^2$ seien die Gerade $g : 2x + y = 3$ und der Vektor $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben. Die Spiegelung an g werde mit σ_g bezeichnet. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ bezeichne τ_v die Translation mit v.

a) Zerlegen Sie u in einen Vektor s senkrecht zu g und einen weiteren Vektor p parallel zu g:

$$u = s + p \,.$$

b) Bestimmen Sie den Typ der Kongruenzabbildung

$$\tau_s \circ \sigma_g$$

und ihre bestimmenden Merkmale, wie z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.

c) Bestimmen Sie den Typ der Kongruenzabbildung

$$\tau_p \circ \tau_s \circ \sigma_g = \tau_u \circ \sigma_g$$

und ihre bestimmenden Merkmale, wie z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.

5. Aufgabe

Wir betrachten die durch

$$41x^2 - 24xy + 34y^2 - 30x - 40y - 25 = 0$$

gegebene ebene Quadrik E.

a) Bestimmen Sie die euklidische Normalform und den Typ von E.

b) Berechnen Sie den Mittelpunkt und die Symmetrieachsen von E.