Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
Kennzahl: ____________		
Kennwort: ____________	Herbst 2023	43912
Arbeitsplatz-Nr.: ________		

Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen

— Prüfungsaufgaben —

Fach: **Mathematik (Unterrichtsfach)**

Einzelprüfung: **Lineare Algebra/Geometrie**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 8

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

In Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_\lambda) \qquad \begin{array}{rcrcrcl} 2\lambda x_1 & + & 3x_2 & + & 2\lambda x_3 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & \lambda x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (G_λ) für jedes feste $\lambda \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung hat.

Hinweis: Die Lösung muss nicht ausgerechnet werden!

2. Aufgabe

Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\|v\| = 1$ und eine reelle Zahl μ bezeichne $E_\mu(v)$ die Ebene mit Normalenvektor v und $\mu v \in E_\mu(v)$. Gegeben seien außerdem die folgenden Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Ebenen $E_\mu(a)$ und $E_\mu(b)$.

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade $g = E_\mu(a) \cap E_\mu(b)$.

c) Ermitteln Sie, für welche $\mu \in \mathbb{R}$ g einen Punkt x mit $\|x\| = 1$ enthält.

3. Aufgabe

Seien A und B reelle $n \times n$ Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von AB.
Zeigen Sie:

a) Ist $\lambda = 0$, dann ist mindestens eine der beiden Matrizen A oder B nicht invertierbar.

b) Sei $\lambda \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von AB zum Eigenwert λ. Zeigen Sie, dass dann Bx ein Eigenvektor von BA ist.

4. Aufgabe

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ seien in $\mathbb{R}^3$ die Gerade

$$h = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie die Ebene

$$E = \left\{ (x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3x + 4z = 25 \right\}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene E in Abhängigkeit von α.

b) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(2, 3, \alpha)^\top$ von der Ebene E in Abhängigkeit von α.

5. Aufgabe

Sei $N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x^2 \right\}$ die Normalparabel.

a) Geben Sie alle bijektiven affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die $f(N) \subseteq N$ erfüllen.

b) Bestimmen Sie, welche von den in Teil a) bestimmten Abbildungen euklidische Bewegungen sind.