Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

Gegeben sei die vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A_s = \begin{pmatrix} s & -2 & 1 \\ 2 & 1 & s \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ sowie der Vektor } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Bestimmen Sie alle $s \in \mathbb{R}$, für die das lineare Gleichungssystem $A_s\mathbf{x} = \mathbf{b}$

a) eine eindeutige Lösung besitzt.

b) keine Lösung hat.

c) mehr als eine Lösung besitzt. Bestimmen Sie für diese s die Lösungsmengen.

2. Aufgabe

Gegeben seien die drei Geraden im $\mathbb{R}^3$

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 2x - y = 2 \\ y - z = 1 \end{matrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie den Abstand zwischen

a) f und h,

b) f und g,

c) g und h.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie in den folgenden zwei Fällen, ob es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den angegebenen Eigenschaften gibt, und bestimmen Sie gegebenenfalls die darstellende Matrix von f in Bezug zur Standardbasis.

a) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

b) $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; f(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

4. Aufgabe

a) Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v} + \mathbf{t}$$

die Spiegelung an der Geraden $x + 2y = 5$. Bestimmen Sie die 2×2-Matrix A und den Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$.

b) Sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto B\mathbf{v} + \mathbf{s}$$

die Drehung um den Punkt $(-2, 1)^\top$ mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$. Bestimmen Sie die 2×2-Matrix B und den Vektor $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$.

c) Bestimmen Sie den Typ der Bewegung

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \mapsto C\mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Bestimmen Sie weiterhin die Matrix C, den Vektor $\mathbf{u}$ sowie die bestimmenden Merkmale der Bewegung (z. B. Spiegelgerade, Drehwinkel, Schubvektor usw.).

5. Aufgabe

Bestimmen Sie die Asymptoten der Hyperbel H im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung

$$H : 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10x + 5y = 8$$

beschrieben wird.