Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe

In Abhängigkeit vom Parameter $s \in \mathbb{R}$ sei das lineare Gleichungssystem

$$(G_s)\qquad \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & + & (s+1)\,x_3 & + & (s+2)\,x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & s\,x_2 & + & (s-1)\,x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ x_1 & + & 2\,x_2 & + & (s+5)\,x_3 & + & (s+1)\,x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 3\,x_2 & + & (s+3)\,x_3 & + & (s-1)\,x_4 & = & 2 \end{array}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(unabhängig von $s \in \mathbb{R}$) eine Lösung von (G_s) ist.

b) Zeigen Sie, dass (G_s) für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ eindeutig lösbar ist.

c) Bestimmen Sie für $s = 1$ die Lösungsmenge von (G_1).

2. Aufgabe

Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben; ferner bezeichne

$$W = \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

den von v_1, v_2, v_3 erzeugten Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$.

a) Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist, und stellen Sie v_5 als Linearkombination von v_1, v_2, v_3, v_4 dar.

b) Es sei $f : \mathbb{R}^4 \to W$ diejenige lineare Abbildung, die bezüglich der Basis v_1, v_2, v_3, v_4 von $\mathbb{R}^4$ und der Basis v_1, v_2, v_3 von W die darstellende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$$

besitzt. Bestimmen Sie $f(v_5)$.

c) Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to W$ aus Teilaufgabe b) eine Basis von $\operatorname{Kern}(f)$ und eine Basis von $\operatorname{Bild}(f)$.

3. Aufgabe

Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ werde eine quadratische $n \times n$–Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachtet; ferner bezeichne $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix sowie $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Nullmatrix.

a) Zeigen Sie die folgende Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ mit vollständiger Induktion: Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $\lambda^k \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert der Matrix $A^k \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Zeigen Sie die folgende Aussage für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ etwa unter Verwendung der Teilaufgabe a): Gilt $A^{2k} + A^k + E = O$, so besitzt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ keinen reellen Eigenwert.

4. Aufgabe

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda = -2$ ein Eigenwert von A ist, und bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $\det(P) = 1$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass

$$P^{\mathsf{T}} A\, P = D$$

gilt.

5. Aufgabe

In der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ sei die Quadrik

$$Q_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2\,\alpha\, x\, y + (\alpha^2 + \alpha)\, y^2 - 2\,\alpha\, y - 3 = 0 \right\}$$

gegeben; dabei ist $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die affine Normalform und den Typ der Quadrik Q_α.

b) Es werde nun speziell für den Parameterwert $\alpha = 1$ die Quadrik Q_1 sowie der Einheitskreis $K \subseteq \mathbb{R}^2$ mit dem Ursprung als Mittelpunkt betrachtet. Begründen Sie, dass es (mindestens) eine bijektive affine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(K) = Q_1$ gibt, und geben Sie eine solche Abbildung explizit an.